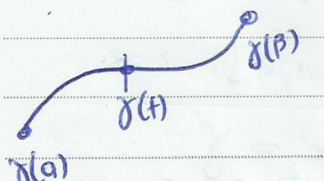
Η πρόταση δεν αναφέρει είποτα για το αν η φ διατηρεί ή αντιστρέφει τον προσανατολισμό (δηλ. τη φορά με την οποία διατρέχουμε την καμπύλη)

Ορισμός: Η $\gamma^-(t) := \gamma(a+\beta-t)$, $t \in [a,\beta]$ για την $\gamma:[a,\beta] \to \mathbb{R}^n$, ονομάζεται αντίστροφη παραμετρική καμπύλη (για την $\gamma(t)$)

Ορισμός: Για μια κανονική καμπύλη (δηλ. με $\gamma'(t) \neq 0$ για καθε $t \in [a,\beta]$) $\gamma:[a,\beta] \to \mathbb{R}^n$. Η συνάρτηση $S(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau$, $t \in [a,\beta]$ λέγεται συνάρτηση μήκους (τόξου) της καμπύλης γ, είναι ένας C^1-παραμετρικός μετασχηματισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό



Ορισμός: Έστω $\gamma:[a,\beta] \to \mathbb{R}^n$ μια κανονική καμπύλη και $S:[a,\beta] \to [0, L(\gamma)]$, η συνάρτηση μήκους της. Η καμπύλη $\mathcal{J} = \gamma \circ (S^{-1}) : [0, L(\gamma)] \to \mathbb{R}^n$, ονομάζεται αναπαραμετρικοποίηση της γ ως προς μήκος καμπύλης.

Πρόταση: Έστω $\gamma:[a,\beta] \to \mathbb{R}^n$ κανονική καμπύλη. Η $\mathcal{J} = \gamma \circ (S^{-1}) : [0, L(\gamma)] \to \mathbb{R}^n$ έχει μοναδιαία ταχύτητα (δηλ. $\|\mathcal{J}'(\tau)\| = 1$ $\forall \tau \in [0, L(\gamma)]$ και αντίστροφα μια καμπύλη με μοναδιαία ταχύτητα είναι παραμετρικοποιημένη ως προς μήκος καμπύλης με $S(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau = t-a$, $t \in [a,\beta]$

Ορισμός: Έστω $\gamma:[a,\beta] \to \mathbb{R}^n$ συνεχώς διαφορ. και $f:\gamma([a,\beta]) \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma f\,ds := \int_\gamma f(x)\,ds := \int_a^\beta f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt$$

ονομάζεται επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f πάνω (ή κατά μήκος της γ) ως προς το μήκος καμπύλης

Πρόταση (ιδιότητες)

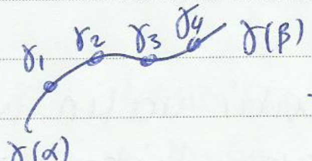
α) Έστω $f, g : \gamma([a,\beta]) \to \mathbb{R}$, με $\gamma : [a,\beta] \to \mathbb{R}^n$ C^1-καμπ.
και f, g συνεχείς τότε

i. $\int_\gamma (f+g)\, ds = \int_\gamma f\, ds + \int_\gamma g\, ds$

ii. $\int_\gamma (c \cdot f)\, ds = c \cdot \int_\gamma f\, ds$, $\forall c \in \mathbb{R}$

iii. $\left| \int_\gamma f\, ds \right| \leq \max |f| \cdot L(\gamma)$

β) Έστω ότι η $\gamma : [a,\beta] \to \mathbb{R}^n$ δίνεται από τα κομμάτια της γ_i, $i = 1, 2, \dots, k$ με t_i, $i = 0, 1, \dots, k$ μια διαμέριση του $[a,\beta]$ και $\gamma_i = \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$
γράφουμε τότε ότι



$$\gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \dots \oplus \gamma_k = \gamma$$

Τότε το $\int_\gamma f\, ds = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} f\, ds =$

$$= \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|\, dt$$

Παρατήρηση:
Αποδεικνύεται ότι για κανονικές καμπύλες το ολοκλήρωμα $\int_\gamma f\, ds$ είναι κάτω από C^1-παραμετρικούς μετασχηματισμούς (και ανεξάρτητο του προσανατολισμού)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα
$\int_\gamma (x+y)\, ds$ όπου $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$

Λύση

$f(x,y) = x + y$ αφού $\gamma(t) \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\int_\gamma (x+y)\, ds = \int_0^\pi f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^\pi f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \|\gamma'(t)\|\, dt$$

$$= \int_0^\pi (\cos t + \sin t) \|\gamma'(t)\|\, dt$$

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$$ ← εφαπτομενο διανυσμα

$$\Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\int_\gamma (x+y)\, ds = \int_0^\pi (\cos t + \sin t)\, dt = \int_0^\pi \sin t\, dt = 2$$